FORMEN + KÖRPER

Die Dinge um uns herum haben häufig ziemlich verrückte Formen, sind krumm und schief und damit mathematisch eigentlich schwer beschreibbar. Aber alles, was man anfassen kann, hat etwas gemeinsam: es ist eine Ansammlung von Punkten. Wenn viele Punkte gerade hintereinander liegen, haben wir eine Linie. Wenn Linien sich auf bestimmte Weisen schneiden, finden wir Flächen und aus Flächen bilden sich schließlich Körper. Mit diesen Formen kann man hervorragend rechnen und du kannst sie überall entdecken:

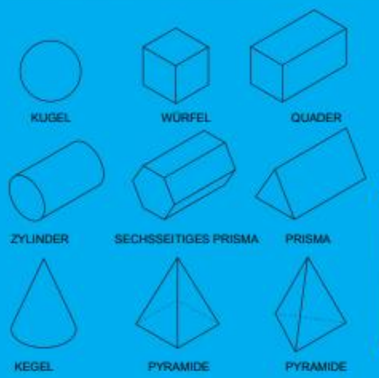
Die wichtigsten Grundformen sind der Kreis, das Quadrat, das Dreieck und das Rechteck.
Schau durch die Brille der Geometrie und erkenne, wie die komplexe Welt um dich herum aus den einzelnen Bausteinen, den Grundformen, zu einem proportionalen Gebilde zusammengefügt ist. So arbeitet die Mathematik, wenn sie komplexe Körper beschreiben will.

Die Musik ist der Geist der Geometrie (Paul Claudel)

Finde heraus, was ist das Besondere an den Platonischen Körpern?

Achte auf die Flächen aus denen sie zusammengesetzt sind!

Die Architektur besteht fast nur aus geometrischen Körpern, aber auch in der Natur kannst du sie finden, bei Kristallen, Metallen und den Seifenblasen.



Zähle auf, aus welchen Flächen werden diese Körper zusammengesetzt?

Ähnlich ist es auch in der Musik. Hier findest du musikalische Bausteine: Tonhöhe, Tondauer, Klangfarbe und Lautstärke. Aus der Kombination dieser Elemente ergibt sich eine Komposition. Jeder musikalische Baustein besitzt dabei spezielle Eigenschaften und funktioniert nach bestimmten Spielregeln. Das richtige Maß ist auch hier die Basis eines harmonischen Zusammenklangs. Was könnte ein solches Maß sein? Wie klingen Körper? Jeder Gegenstand gibt ein einzigartiges Geräusch von sich.
Woran liegt das? Untersuche genau das Material und die Form – alles hat unterschiedliche physikalische Gegebenheiten und wirkt auf den Klang. Du kannst auch Alltagsdinge zum Musizieren benutzen. Deine Freunde nehmen etwas als musikalisch wahr, wenn planmäßige Relationen zu hören sind: Regelmäßigkeit, Wiederholung, Rhythmus. Komponiere doch mal eine Klangmontage in eurer Küche!

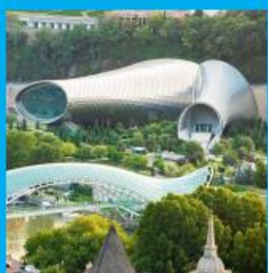
Wie klingt rund, wie klingt eckig?
Was klingt gar nicht?
Wie klingt dünn, dick?
Wie klingt lang, kurz?

Finde heraus welche Flächen und welche Körper du hier siehst und nenne sie!







Idee: hier schulen wir die **Figur-Grundwahrnehmung** und die Vorstellung, dass größere Flächen in Einzelteile aus geometrischen Formen zerlegt werden können. Grundformen – Warum sind dies „Grundformen“, wo findest du sie an Körpern? Die Grundformen/ -körper vereinfachen eine Bestimmung und Lesbarkeit.

MUSIK
wie klingen Formen? Klingt alles in der Welt *irgendwie*? Können Gegenstände Töne hervorbringen? Beobachte, wie die verschiedenen Objekte klingen, Wie verhalten sich die Töne zueinander?

Material Vibrationen Tetrachord, MBradke

MATHE
Knobeltisch MAXI, Knobeltisch MiNi: siehe Erläuterungen auf Anleitungsblatt

Stadtsilhouette – Wir bauen eine Stadt

Mit unterschiedlichen Bauklötzen lässt sich die Stadt nachbauen. Gemeinsam kann man so ein Haus nach dem anderen aufbauen und dabei immer wieder überlegen und ausprobieren, welcher Klotz die beste Wahl ist. Bei den Abbildungen der Gebäude handelt es sich um Schattenbilder. Die Schatten werden allerdings nicht tatsächlich erzeugt, sondern schemenartig dargestellt

Mathematischer Hintergrund: Hier lässt sich erfahren, dass das gleiche Schattenbild von unterschiedlichen Varianten an Bauklötzen ausgefüllt werden kann. So werden spielerisch größere Flächen in Einzelteile aus geometrischen Formen zerlegt.
Das Suchen der richtigen Klötze in den Boxen schult auch die Figur-Grundwahrnehmung, indem aus einem großen „Gewirr“ an Körpern der richtige erkannt werden muss, auch wenn die Klötze auf der Seite liegen oder halb verdeckt sind.

Zum Weiterdenken: Schau dir das hohe Gebäude in der Mitte der Schattenstadt an. Finde unterschiedliche Möglichkeiten, es zu bauen? Versuche, ein großes Dreieck zu bauen. Welche Steine benötigt man dafür?

Was alles in den Würfel passt?

Vor uns steht ein Glaswürfel, der oben offen ist. In diesen soll ein vergleichsweise großer Tetraeder eingefügt werden. Zunächst wird man vermutlich scheitern. Man kann auf die richtige Lösung kommen, indem man die erfolglosen Versuche beschreibt. Mit einer Spitze nach unten geht es nicht und mit einer Seitenfläche funktioniert es auch nicht. Neben Ecken und Flächen zeigt das Tetraeder aber auch Kanten – und wenn man eine Kante nach unten hält, dann lässt sich das Tetraeder ganz leicht in den Würfel schieben.

Mathematischer Hintergrund: Dieses Experiment führt zu einer Fülle von mathematischen Aktivitäten. Wir wissen, dass der Würfel sechs Seiten und das Tetraeder sechs Kanten hat. Das Experiment zeigt, dass dies nicht eine zufällige Koinzidenz ist, sondern dass die Gleichheit der Zahlen Ausdruck einer geometrischen Beziehung ist: An jeder Fläche des Würfels liegt genau eine Kante. Wenn man das Tetraeder im Würfel anschaut, hat man den Eindruck, es liegt irgendwie „schief". Wie muss man den Würfel halten, damit das Tetraeder ,,normal", das heißt, auf einer waagerechten Seitenflache steht?
Die vier Ecken des Tetraeders nehmen nur vier Ecken des Würfels in Beschlag, es gibt also noch vier ,,freie" Ecken. Nimmt man das Tetraeder heraus, dreht es um 90 Grad und setzt es dann wieder ein, dann berührt es die

vier vorher ,,freien" Ecken. Die beiden möglichen Positionen der Tetraeder im Würfel zusammen (das heißt, ihre Vereinigung) bilden den so genannten ,,Kepler-Stern", einen Stern, den Johannes Kepler (1571-1630) entdeckt und ,,stella octangula" (achteckiger Stern) genannt hat!

Welcher Anteil des Würfelvolumens wird von dem Tetraeder eingenommen? Wir bezeichnen dazu die Länge einer Würfelkante mit a. Der Würfel hat damit das Volumen a^3. Diese Frage beantwortet man am besten, indem man den Anteil des Würfelvolumens ausrechnet, der außerhalb des Tetraeders liegt. Dieser Teil ' besteht aus vier ,,Ecken"; jede davon ist eine unregelmäßige Pyramide. Man kann sich jede dieser Pyramiden so vorstellen, dass ihre Grundseite eine halbe Quadratseite ist, also den Flächeninhalt $a^2/2$ hat. Die Höhe jeder Pyramide ist dann a.

Das Volumen einer Pyramide ist 1/3 mal Grundfläche mal Höhe. Also ist das Volumen unserer Pyramide gleich $1/3 \cdot a^2/2 \cdot a = a^3/6$. Da es vier solche Pyramiden gibt, ist deren Gesamtvolumen $4 \cdot a^3/6 = 2/3 \cdot a^3$. Für das Tetraeder bleibt dann noch der Rest, also $a^3 - 2/3 \cdot a^3 = 1/3 \cdot a^3$. Also nimmt das Tetraeder genau ein Drittel des Würfelvolumens ein.

Zur Geschichte: Tetraeder und Würfel ordnen sich ein in die Reihe der ,,regulären" Körper, die auch ,,platonische Körper" genannt werden. Sowohl die Seitenflächen als auch die Kanten und Ecken der platonischen Körper sind vollkommen identisch. Da dies so außergewöhnlich ist, ist die Zahl der platonischen Körper begrenzt. Mehr als fünf solcher Körper kann man nicht finden.

Tetraeder (Dreieckspyramide): Sie besteht aus 4 gleichseitigen Dreiecken.
Hexaeder (Würfel): Er besteht aus 6 gleichen Quadraten.
Oktaeder: Er besteht aus 8 gleichseitigen Dreiecken.
Dodekaeder, auch Pentagondodekaeder genannt: Er besteht aus 12 gleichen Fünfecken.
Ikosaeder: Er besteht aus 20 gleichseitigen Dreiecken.

Mathematisch formuliert: Unter den platonischen Körpern versteht man konvexe Körper, die durch zwei Regularitätseigenschaften gekennzeichnet sind: Zum einen ist jede Seitenflache ein reguläres n-Eck (Regularität der Flächen) und zum anderen stoßen an jeder Ecke die gleiche Anzahl m von Flächen zusammen (Regularität der Ecken).

Was bedeutet konvex? Alle Punkte der Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten des Körpers sind ebenfalls Teil des Körpers. Für einen Stern gilt das zum Beispiel nicht. Dieser Körper ist also nicht konvex.

Einer der ersten Sätze der Mathematik ist die Klassifikation dieser Körper, die auf den griechischen Mathematiker Theaitet (415-369 v. Chr.) zurückgeht: Die einzigen platonischen Körper sind: das Tetraeder ($n = 3$, $m = 3$), der Würfel ($n = 4$, $m = 3$), das Oktaeder ($n = 3$, $m = 4$), das Ikosaeder ($n = 3$, $m = 5$) und das Dodekaeder ($n = 5$, $m = 3$). Für den antiken Philosophen Platon (428/427- 348/347 v. Chr.) spielten diese Körper eine wichtige Rolle; daher kommt auch der Name „platonische" Körper. Platon hat diese Körper mit besonderer Bedeutung aufgeladen, indem er sie in Beziehung zu den antiken Elementen setzte. Das Tetraeder identifizierte er mit dem Feuer, den Würfel mit der Erde, das Oktaeder mit der Luft, das lkosaeder mit dem Wasser.

Zur Faszination der platonischen Körper hat auch beigetragen, dass sie in vielfaltiger Beziehung untereinander stehen. Wenn man die Parameter n und m der platonischen Körper anschaut, zeigt sich eine Dualität der Zahlen: Bei Würfel und Oktaeder sind n und m genau vertauscht. Das zeigt sich auch in den Anzahlen der Ecken und Flachen dieser beiden Körper: Die Anzahl der Flachen des Würfels (6) ist gleich der Anzahl der Ecken des Oktaeders, umgekehrt ist die Anzahl der Flachen des Oktaeders (8) gleich der Anzahl der Ecken des Würfels. Auch hier handelt es sich nicht um eine zufällige Obereinstimmung von Zahlen, sondern diese sind Ausdruck einer geometrischen Beziehung: Die Mittelpunkte der Seiten eines Würfels sind die Ecken eines Oktaeders und umgekehrt. Eine entsprechende Dualität kann man auch in der Beziehung zwischen lkosaeder und Dodekaeder entdecken.
Das Tetraeder ist zu keinem anderen Körper dual, aber zu sich selbst. Man kann zwei gleichgroße Tetraeder auch so zusammengestellt denken, dass jede Kante des einen eine Kante des anderen senkrecht schneidet. Die Gesamtfigur, die dabei entsteht, ist der Kepler-Stern.

Körper bauen, Polydron

Bei diesem Experiment kann man Körper aus regulären Vielecken zusammensetzen. Im Prinzip gibt es keine Einschränkung: Man kann konvexe und konkave Körper bauen, solche, die aus einer Sorte von Flächen bestehen, und solche, bei denen die Flächentypen bunt gemischt sind. Man kann regelmäßige und unregelmäßige Körper konstruieren.

Mathematischer Hintergrund: Besonders attraktiv sind ,,reguläre" Körper.
Das sind in erster Linie die platonischen Körper. Das sind konvexe Körper, deren Seitenflächen reguläre n-Ecke sind und bei denen an jeder Ecke die gleiche Anzahl m von Flachen zusammenstoßen. Es gibt genau fünf platonische Körper: Tetraeder, Würfel, Oktaeder, lkosaeder und Dodekaeder.

Noch interessanter sind die archimedischen Körper (auch ,,semireguläre" Körper genannt). Dies sind konvexe Körper, bei denen jede Seitenfläche ein reguläres Vieleck ist (wobei unterschiedliche Eckenzahlen erlaubt sind) und jede Ecke ,,gleich aussieht". Das bedeutet, dass an jeder Ecke die Abfolge der Eckenzahlen der Vielecke an dieser Ecke gleich ist. Zum Beispiel konnte die Abfolge 3, 4, 3, 4 sein; das bedeutet, dass an jeder Ecke zwei Dreiecke und zwei Vierecke zusammenkommen, wobei die Dreiecke und Vierecke abwechselnd vorkommen. Diese ,,Signatur" eines archimedischen Körpers ist in gewissem Sinne sein Bauplan: Wenn man dieser lokalen Beschreibung konsequent folgt, entsteht automatisch der entsprechende Körper. Neben den platonischen Körpern sowie den Prismen und Antiprismen gibt es noch 15 individuelle archimedische Körper. (Manchmal werden nur 13 archimedische Körper angegeben; aber zwei von diesen 13 Körpern haben ein Spiegelbild, das nicht durch eine Drehung aus dem Ausgangskörper entstehen kann.)
Der bekannteste archimedische Körper ist der klassische ,,Fußball", der aus Fünfecken und Sechsecken besteht. Er hat die Signatur 5, 6, 6.